Magyar Tudomány 181(2020)11, 1509–1522
DOI: 10.1556/2065.181.2020.11.8

A VÉGTELEN IDÓLUMA

THE IDOL OF INFINITY

E. Szabó László
az MTA doktora, egyetemi tanár, ELTE BTK Filozófia Intézet Logika Tanszék, Budapest
laszlo.e.szabo@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÁS

Amellett fogok érvelni, hogy egy koherens fizikalista ontológiára épülő, általam fiziko-formalista matematikafilozófiának nevezett megközelítés tükrében, a „végtelen" semmivel nem nagyobb probléma, mint a „kettő".

ABSTRACT

It will be argued that 'infinity' is not more problematic than, say, 'two', if the fundamental ontological doctrine of physicalism is accepted. The argument will be based on what I call the physico-formalist philosophy of mathematics.

Kulcsszavak: fizikalizmus, matematikafilozófiai formalizmus, formális rendszer, jelentés, igazság, elmélet, holizmus, empirikus–teoretikus

Keywords: physicalism, formalism in the philosophy of mathematics, formal systems, meaning, truth, theory, holism, empirical–theoretical

> „Az egyetlen, nagyon egyszerű módszer, hogy tanainkat meggyőző erővel fejtsük ki, hogy az embereket magukkal a partikuláris létezőkkel szembesítjük, azok szekvenciáival és rendjével, nekik pedig le kell mondaniuk egy időre a fogalmakról, és össze kell barátkozniuk a valóságos dolgokkal."
>
> Francis Bacon[1]

[1] *The New Organon*, Aphorisms – *On the Interpretation of Nature and the Kingdom of Man*. Book I, XXXVI. (Bacon, 2000, 40.)

1. Tézisem egyetlen mondatban foglalható össze: A „végtelen” semmivel nem nagyobb probléma, mint mondjuk a „kettő”. Ennek belátásához azonban nagyon messziről leszek kénytelen elkezdeni fejtegetéseimet. Hogy a megfelelő kiindulópontra állhassunk, máris pontosítom magát a tézist: Ha elfogadjuk azt a tézist, hogy a világban semmi más nem létezik, mint a partikuláris fizikai entitások – nevezzük ezt a feltételezést fizikalista ontológiának –, és ha ezt a tézist kitartó következetességgel visszük végig filozófiai elméleteinken, akkor arra a konklúzióra fogunk jutni például, hogy a „végtelen” semmivel nem nagyobb probléma, mint a „kettő”. Nem az a célom ebben a cikkben, hogy a fizikalizmus mellett érveljek, hanem hogy megmutassam, hogyan lehet koherens módon számot adni néhány, a filozófiai megfontolásainkban fontos szerepet játszó dologról a fizikalista feltevés mellett. Annyit viszont közölnöm kell, hogy mit értek fizikai entitásokon. Egyszerűen azokat az entitásokat, amelyeket a szokásos filozófiai diskurzusban fizikai entitásoknak szokás nevezni: elemi részecskék, mezők és ezekből összeálló objektumok, bolygók, biliárdgolyók, gázok stb. Szemben olyasmikkel, amiket ugyanezen hagyomány szerint nem fizikai entitásoknak szokás gondolni, vagyis a mentális és absztrakt entitásokkal: gondolatok, ideák, számok stb.

2. Elsőként azt a kérdést fogom vizsgálni, hogyan értelmezhetők a logikai, illetve matematikai tények a fizikalista ontológia keretén belül. Kiindulópontom a formalista matematikafilozófia lesz. Számos ok közül mindenekelőtt azért, mert a négy standard matematikafilozófiai felfogásból kettőt, a matematikai platonizmust és az intuicionizmust vagy más néven mentalizmust, azonnal kizárhatunk, hiszen e tanok szerint a matematika valami olyasmikről szóló diszciplína lenne, melyek létezését a fizikalizmus tagadja. A John Stuart Mill-féle immanens realizmus szerint pedig a matematika lényegében egy, a fizikai világról szóló elmélet lenne. A későbbiekben lesz szó arról, hogy mi egy ilyen elmélet struktúrája, és mik a rekvizitumai, és nyilvánvaló lesz, hogy a matematika önmagában nem rendelkezik ezekkel a rekvizitumokkal.

A formalista felfogás lényegét David Hilbert tömören úgy fejezte ki, hogy „[a] matematika egy jelentés nélküli szimbólumokkal történő játék, bizonyos jól meghatározott játékszabályokkal” (Bell, 1951, 38.). Ennek megfelelően, a matematikai tények – melyekről majd számot kell adnunk a fizikalista ontológiában – nem mások, mint ennek a „játéknak”, vagyis a szóban forgó formális rendszernek a tényei. Ezek tipikusan olyan alakban fejezhetők ki, hogy „$\Sigma \vdash A$”, ahol Σ a formális rendszer formuláinak egy „axiómáknak” vagy „premisszáknak” nevezett halmaza, A egy „tételnek” mondott formula, $\vdash$ pedig az úgynevezett „(single) turnstile”, vagy más néven szintaktikai következmény reláció. Vagyis, arról a tényről van szó, hogy az adott formális rendszer deduktív szabályai szerint az A formula levezethető a Σ axiómákból. Fontos hangsúlyoznunk, hogy a formalista matematikafilozófia szerint sem A, sem pedig Σ elemei nem állítások, melyek igazak vagy hamisak lehetnek. Ezek csupán a formális rendszer formulái, jelentés nélküli jelek/jelsorozatok. A ⊢ következményrelációnak semmi köze az „igazságmegőrző ha–akkor típusú következtetéshez”. Egyszerűen azt jelöli, hogy létezik jelentés nélküli formuláknak egy olyan véges sorozata, melynek elemei beleillenek a „következtetési szabályoknak” nevezett sablonokba. Illusztrációként idézzünk fel egy példát: az *1. ábrán* a „Csoportelmélet” nevű formális rend-

ABC

változók	$x, y, z, \ldots$	
individuális konstansok	e	(egységelem)
függvényjelek	i, p	(inverz, szorzat)
predikátum jel	$=$	
logikai jelek	$\forall, \neg \rightarrow$	
egyebek	(,), ,	

Derivációs szabályok

(MP)	$\{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)\}$ ` ψ	(modus ponens)
(G)	φ ` $\forall x \varphi$	(generalizáció)

Axiómák

(PC1)	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
(PC2)	$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
(PC3)	$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
(PC4)	$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x \psi)$ [ha x nem szabad φ-ben]
(PC5)	$\forall x \varphi \rightarrow \varphi$ [ha x nem szabad φ-ben]
(PC6)	$\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(t)$ [ha t szabad x-re nézve $\varphi(x)$-ben]
(E1)	$x = x$
(E2)	$t = s \rightarrow f^n(u_1, u_2, \ldots, t, \ldots u_n) = f^n(u_1, u_2, \ldots, s, \ldots u_n)$
(E3)	$t = s \rightarrow (\varphi(u_1, u_2, \ldots, t, \ldots u_n) \rightarrow \varphi(u_1, u_2, \ldots, s, \ldots u_n))$
(G1)	$p(p(x, y), z) = p(x, p(y, z))$
(G2)	$p(e, x) = x$
(G3)	$p(i(x), x) = e$

Tétel: $p(e, p(e, e)) = e$

Bizonyítás:

(1)	$p(e, x) = x$	(G2)
(2)	$\forall x p(e, x) = x$	(G)
(3)	$\forall x p(e, x) = x \rightarrow p(e, e) = e$	(PC6)
(4)	$p(e, e) = e$	(2), (3), (MP)
(5)	$\forall x p(e, x) = x \rightarrow p(e, p(e, e)) = p(e, e)$	(PC6)
(6)	$p(e, p(e, e)) = p(e, e)$	(2), (5), (MP)
(7)	$p(e, e) = e \rightarrow (p(e, p(e, e)) = p(e, e) \rightarrow p(e, p(e, e)) = e)$	(E3)
(8)	$p(e, p(e, e)) = p(e, e) \rightarrow p(e, p(e, e)) = e$	(4), (7), (MP)
(9)	$p(e, p(e, e)) = e$	(6), (8), (MP)

1. ábra. Csoportelmélet

szert láthatjuk, a $p(e,p(e,e)) = e$ tételének bizonyítását alkotó formulasorozattal. A formális rendszer tartozékai: egy (esetünkben első rendű) nyelv, a derivációs szabályok, a logikai axiómák (első rendű predikátum kalkulus az egyenlőséggel), valamint a matematikai axiómák (a csoportelmélet axiómái). Bizonyítás egy olyan véges formulasorozat, melyre igaz, hogy minden formulája vagy egy axióma, vagy valamely korábbi formulával/formulákkal együtt a következtetési szabályok valamelyikének megfelelő mintázatba illik bele.

3. Egyesek szerint pontosan az a formalista matematikafilozófia erénye, hogy nem implikál semmiféle ontológiai elköteleződést. Ez szó szerint véve igaz, bár a formalista matematikafilozófia különböző iskolái alapvetően tagadják a platonista, illetve mentalista értelemben vett matematikai entitások létezését (Weir, 2015). Ugyanakkor nem világos, hogy mit kínálnak helyette, és jellemzően ambivalens válaszokat adnak az ontológiai kérdésekre:

> „Bár egy formális rendszer különböző formákban reprezentálható, a tételek, melyeket egy adott szimbolikus megfogalmazásban (primitive frame) levezetünk, igazak maradnak a konkrét reprezentáció megváltoztatásától függetlenül. Valamilyen értelemben tehát létezik a szimbolikus megfogalmazástól független formális rendszer mint a gondolkodás egyértelműen meghatározott tárgya. Ez nem jelenti azt, hogy létezne egy hiposztazált, formális rendszernek nevezett entitás, amely mindenféle reprezentációtól függetlenül létezik. Ellenkezőleg, nem is vagyunk képesek elképzelni egy formális rendszert másként, csak valamilyen reprezentációban. Ám amikor úgy gondolunk rá *mint* formális rendszerre, akkor elvonatkoztatunk a reprezentáció partikuláris tulajdonságaitól. Az ember képes arra, hogy teljesen konkrét dolgokról absztrakt módon gondolkodjon, és ahhoz, hogy erről a jelenségről számot adjunk, semmi szükségünk misztikus absztraktumok kitalálására.
>
> Szükségtelen tovább elmélyednünk a formális rendszerek mibenlétének kérdésében. A matematika egyik sajátossága, hogy a vizsgálódásának tárgyát képező objektumnak csak bizonyos esszenciális tulajdonságaival foglalkozik, míg más tulajdonságok irrelevánsak számára. Az egyik ilyen irreleváns kérdés a formális rendszerek ontológiája." (Curry, 1951, 30.)

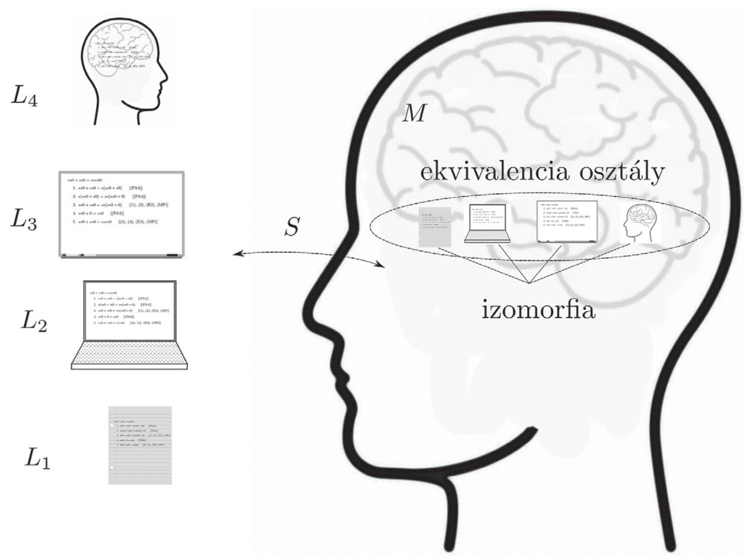
A mi célunk ezzel szemben éppen az, hogy elhelyezzük a formalista matematikát, vagyis a formális rendszereket, a fizikalista ontológiai képben. Hol vannak a fizikai világban azok a tényállások, melyek a „$\Sigma \vdash A$" típusú állításokat igazzá vagy hamissá teszik? Például, mik azok a fizikai tények, melyek az *1. ábrán* az (1)–(9) formulasorozatot bizonyítássá teszik? Miben áll például az a tény, hogy az (1) formula nem más, mint a (G2) axióma? Ez azt jelenti, hogy az (1) sorban álló $p(e,x) = x$ formula ugyanaz, mint a $p(e,x) = x$ formula a (G2) sorban. De mit is jelent ez? Azt a *fizikai* tényt, hogy a folyóirat lapján a fekete és fehér pixelek elhelyezkedése a két formulában azonos, vagyis kongruens egymással. Mit jelent az, hogy a $\forall x p(e,x) = x$ formula a (2) sorban a $p(e,x) = x$ formulából nyerhető a (G) generalizáció alkalmazásával? Ez azt a *fizikai* tényt jelenti, hogy a ϕ pixel-konfigurációt $\phi \vdash \forall x \phi$-ben a $p(e,x) = x$ pixel-konfigurációval helyettesítve – például copy/paste segítségével a komputeremen – azt kapjuk, hogy $p(e,x) = x \vdash \forall x p(e,x)$, melyben a $\vdash$ jel előtti rész kongruens a $p(e,x) = x$ pixel-konfigurációval az (1) sorban, a $\vdash$ jel utáni rész pedig kongruens a $\forall x p(e,x) = x$ pixel-konfigurációval a (2) sorban. És így tovább. Ami fontos számunkra, az az, hogy ezek mind a fizikai világ tényei, és hogy ezekhez a tényekhez történő episztemikus hozzáférésünk semmiben nem különbözik a fizikai világ más tényeihez történő hozzáférésünk-től, vagyis *a posteriori*.

A fenti példán tett megfigyelésünket általánosítva a következő tézist fogalmazzuk meg:

> ***Fiziko-formalista tézis:*** *A logikai, illetve matematikai tények, lévén formális tények, nem mások, mint valamilyen konkrét fizikai jelekben, konkrét fizikai konfigurációkban, illetve folyamatokban megtestesülő formális rendszernek a fizikai tényei.* (Szabó, 2003, 2012)

E fizikailag megtestesült formális rendszerek változatos fajtájúak lehetnek: tinta-konfigurációk a papíron, egy agy neurális konfigurációi, egy komputer elektronikus folyamatai vagy ezek különböző kombinációi stb. A lényeg az – és ez a fiziko-formalista elmélet lényege –, hogy teljes egészében a fizikalista ontológia keretén belül maradunk anélkül, hogy absztrakt, konceptuális vagy mentális entitásokat hiposztazálnánk.

4. „Absztrakt” vagy „matematikai” értelemben vett formális rendszerek gyakran úgy vannak elgondolva, hogy azokat absztrakció útján nyerjük, elvonatkoztatva a konkrét fizikailag létező formális rendszerek lényegtelen, partikuláris tulajdonságaitól, kiemelve azokat a tulajdonságokat, melyek több különböző, fizikailag létező formális rendszerben közösek (lásd a 3. pontban idézett részletet Curry-től). Nézzük meg közelebbről, mit is jelent egy ilyen absztrakció? Tekintsünk különböző fizikailag létező formális rendszereket, L_1, L_2, L_3, … L_n. Ahhoz, hogy elvonatkoztassunk ezek bizonyos partikuláris tulajdonságaitól, és izoláljuk azt, ami bennük közös, mindenekelőtt rendelkeznünk kell annak tudásával, hogy az L_1, L_2, L_3, … L_n fizikai objektumoknak milyen tulajdonságaik vannak. Hogy csak az ideális esettel foglalkozzunk, rendelkeznünk kell egy (M,S) fizikai elmélettel (hogy mi egy fizikai elmélet, azt később, a 7. pontban fogjuk értelmezni), melynek szemantikája kiterjed a világ L_1, L_2, L_3, … L_n objektumait tartalmazó részére, és persze olyan, hogy ezeknek az objektumoknak a helyes leírását nyújtja. Csak egy ilyen „metamatematikai” elméletben – amely tehát a fizikailag létező formális rendszereknek mint fizikai objektumoknak a fizikai elmélete – lehet egyáltalán megfogalmazni az absztrahálás lépéseit, értelmezni az L_1, L_2, L_3, … L_n objektumok közötti hasonlóságokat, ekvivalencia osztályokat bevezetni stb. De az (M,S) elméletnek – mint parciálisan interpretált formális rendszernek – az M része, maga is egy fizikailag létező formális rendszer – ahogy Curry mondaná, másképp el sem tudjuk gondolni. Az absztrakció minden egyes lépése ennek a fizikailag létező formális rendszernek az elemei által van reprezentálva *(2. ábra).* Azaz az absztrakció nem vezet ki bennünket a fizikailag létező dolgok világából, és nem nyerünk egy a fizikailag megtestesült formális rendszereken túli „absztrakt/matematikai formális rendszert”, amelynek L_1, L_2, L_3, … L_n a konkrét fizikai „reprezentációi” lennének. Egyszerűen annyi történik, hogy egy fizikailag létező formális rendszer mint fizikai objektum reprezentálva van egy másik fizikailag létező formális rendszerben, egy fizikai elmélet keretében.



2. ábra. Az absztrakció minden egyes lépése egy másik fizikailag létező formális rendszerben történő reprezentációban megy végbe

5. Összefoglalva tehát, azt látjuk, hogy a logikai és matematikai állítások – mindenekelőtt a $\Sigma \vdash A$ típusú állítások – fizikai tényeket állító állítások, és ugyanolyan episztemológiai státuszúak, mint a fizikai világ más tényeinek állításai. Ennek természetesen messzemenő filozófiai következményei vannak: a logikai és matematikai igazságok a fizikai világ egy partikuláris darabjának, nevezetesen a szóban forgó formális rendszernek az objektív tényeit fejezik ki.

Mint ilyenek, szintetikusak, *a posteriori* természetűek, nem szükségszerűek, fallibilisek, tehát nem szolgáltatnak abszolút bizonyosságot. Ezáltal viszont a logikai és matematikai állításoknak van kontingens faktuális tartalmuk, mint minden más tudományos állításnak, és ennek megfelelően „igazak, hasznosak, és meglepőek" (Ayer, 1952, 72.) tudnak lenni. A logikai és matematikai tények „felfedezhetőek" (vö. Hardy, 1929), mint a természet bármely más ténye, hasonlóan ahhoz, ahogyan egy műanyag molekulára vagy más artefaktumra vonatkozó tény felfedezhető.

6. Mindez természetesen vonatkozik az olyan matematikai tényekre is, amelyek a végtelen valamilyen matematikai fogalmával kapcsolatosak. Pontosabban, a „fogalom" szó használata indokolatlan, hiszen egy jelentés nélküli szimbólum vagy formula nem nevezhető fogalomnak. És ebből a szempontból teljesen mindegy, hogy a szóban forgó formula egy „végtelen számosságot" vagy éppen a „kettőt" jelölő kifejezés, egyik sem fejez ki semmiféle fogalmat, és nem ír le semmit a fizikai világban. Éppen ezt kifogásolja Rudolf Carnap a matematika tisztán formalista értelmezésében:

> „A formalista megközelítés helyes abban az értelemben, hogy az egész rendszer felépíthető tisztán formális eszközökkel, vagyis anélkül, hogy a szimbólumok jelentésére hivatkoznánk. Elég lefektetnünk azokat a transzformációs szabályokat, melyekből aztán automatikusan következik bizonyos mondatok és a köztük fennálló következmény-relációk érvényessége. És mindehhez nem szükséges sem feltennünk, sem megválaszolnunk a formális struktúrán túlra mutató tartalmi kérdéseket. De ez a program nyilvánvalóan nem vihető végig pusztán a logikai-matematikai kalkulus megkonstruálásával. Mert ez a kalkulus nem tartalmazza mindazokat a mondatokat, melyek egyfelől tartalmazzák a matematikai szimbólumokat, másfelől relevánsak a tudomány számára. Történetesen azokat a mondatokat, amelyek a *matematika alkalmazása* szempontjából érdekesek, azaz a matematikai szimbólumokkal kifejezett szintetikus deskriptív mondatokat. Például, az a mondat, hogy »Ebben a szobában most két ember van« nem vezethető le pusztán a logikai-matematikai kalkulus segítségével abból a mondatból, hogy »Karcsi és Péter itt vannak most a szobában, és senki más nincs a szobában«." (Carnap, 1937, 326.)

Mondanivalóm megvilágítása érdekében érdemes kielemeznünk azt a három dolgot, amelyben Carnap megítélésem szerint téved. Először, a formalista értelmezés szerint a formális rendszer formulái valóban nem alkalmasak arra, önmagukban, hogy bármit is kifejezzenek a világból. És ez nem is lehet másképpen, hacsak nem feltételeznénk, hogy egy formális rendszerbe mint kristálygömbbe nézve, szintetikus *a priori* állításokat mondhatunk a fizikai világról. (Ezen az sem segítene, ha a tiszta formalista matematikát a Carnap által a fent idézett passzust követően javasolt Frege-féle logicizmussal egészítenénk ki.) Másodszor, ha az argumentum kedvéért elgondolunk egy, a fizikai világot leíró elméletet – melynek fogalmát éppen Carnap nyomdokain haladva fogunk az alábbiakban megalkotni –, melynek nyelve nyilván bővebb, mint a tiszta matematika nyelve, például van benne „szoba", „Karcsi", „Péter", és a logikai és matematikai axiómákon kívül vannak további (fizikai) axiómák is, akkor éppenséggel lehetséges, hogy ebben a formális rendszerben, az axiómákkal együtt a két mondat a kívánt következmény-relációban álljon egymással. Viszont, és ez a harmadik észrevétel, még ha ez is a helyzet a formális rendszeren *belül,* a formális rendszer formulái, beleértve a két szóban forgó mondatot, akkor is jelentés nélküli objektumok maradnak, és önmagukban nem referálnak semmire.

Első konklúzióként tehát megállapíthatjuk, hogy a tiszta logikai és matematikai értelemben vett „végtelen" (bármi is legyen az a formális konstrukciót tekintve) ugyanolyan státuszú alkatrésze lehet egy – egyébként fizikai értelemben létező – formális rendszernek, mint a „kettő".

7. A fizikai világ valamely jelenségkörét leíró fizikai elméletet úgy foghatjuk fel, mint egy parciálisan interpretált formális rendszert. Jelöljük, szimbolikusan, a szóban forgó jelenségkört *U*-val, az elméletet pedig (*L,S*)-sel, ahol *L* a szóban forgó formális rendszert jelöli, *S* pedig az alábbiakban értelmezett parciális szemantikát. Az *L* formális rendszert továbbra is úgy értjük, hogy magában foglalja a formális nyelvet, a derivációs szabályokat, és valamilyen Σ_L axiómarendszert. Az elmélet axiómáit tradicionálisan logikai, matematikai és fizikai axiómákra szokás osztani, bár ennek a megkülönböztetésnek semmi elvi jelentősége nincsen.

Az elméletnek ez a felfogása természetesen Carnap 1939-ben írt *Theories as Partially Interpreted Formal Systems*jéhez nyúlik vissza:

> „A fizikai elméletek bármelyike, hasonlóképpen az egész fizika, megadható egy interpretált formális rendszer alakjában, amely két dologból áll, egy meghatározott kalkulusból (axiómarendszerből), és az interpretációhoz szükséges szemantikai szabályok rendszeréből. Az axiómarendszer, hallgatólagosan vagy expliciten, a logikai-matematikai kalkulusra és annak megszokott interpretációjára épül." (Carnap, 1939, 23. bekezdés)

Az elméleteknek az az értelmezése, melyet az alábbiakban bemutatok, sok vonatkozásban párhuzamba állítható Carnap elgondolásával, leszámítva két jelentős különbséget. Először, a fiziko-formalista megközelítésben a „logikai-matematikai kalkulus", önmagában, csupán egy jelentés nélküli formális rendszer, bármifajta „megszokott interpretáció” nélkül. Másodszor, a szemantikának a következő pontban kifejtett értelmezése szerint, a formális rendszer elemei és a fizikai világ közötti szemantikai kapcsolat nem valami olyan dolog, amelyet az elmélet nyelve *belsőleg,* valamiféle „korrespondencia-szabályok” formájában tartalmazna. Ellenkezőleg, mint látni fogjuk, a szemantika az elmélet nyelvére nézve *külső* dolog, legalábbis, részben külső dolog; a fizikai világnak egy jelensége, melyet az L formális rendszer és a fizikai világnak az elmélet által leírandó U része közösen produkál.

8. A szemantika értelmezésében (Szabó, 2017) egy olyan intuícióra támaszkodunk, melyet Kurt Gödeltől tanulhatunk meg az első nemteljességi tétel bizonyításában. A bizonyítás előkészítésében Gödel világos formában megfogalmazza, mit jelent az, hogy egy formális rendszer bizonyos formulái jelentéssel vannak felruházva, vagyis, hogy a formális rendszeren kívüli világ bizonyos tényállásaira referálnak, azokat reprezentálják. Konkrétan, a metaaritmetikai tényállásokat kifejező állítások reprezentációját adja meg magában a Peano-aritmetikában. Jelen céljainkból ennek a konstrukciónak csak a végeredményét érdemes felidézni (Crossley et al., 1990, 52–54.; Hamilton, 1988, 145–146.). Jelölje $Pr(x,y)$ azt a metaaritmetikai tényállást, hogy „az x Gödel-számú formulasorozat az y Gödel-számú formula bizonyítása”. Jelölje továbbá $\{Pr(x,y)\}_{x,y}$ az ilyen típusú metaaritmetikai tényállások családját, ahol x és y tetszőleges Gödel-számok. Adott x és y Gödel-számokra, $Pr(x,y)$ vagy valóban fennáll, vagyis az x Gödel-számú formulasorozat valóban bizonyítása az y Gödel-számú formulának, vagy nem. Gödel konstrukciójában a $\{Pr(x,y)\}_{x,y}$ családba tartozó tényállásokat a Peano-aritmetika egy alkalmasan konstruált $\{R(x,y)\}_{x,y}$ formulacsaládjával reprezentáljuk. A reprezentálás ténye a következő feltétel teljesülésében áll: tetszőleges x és y Gödel-számokra, vagyis mindegyik összetartozó $Pr(x,y)$ és $R(x,y)$ párra igaz, hogy

ha $Pr(x,y)$ egy valóban fennálló metaaritmetikai tény, akkor $\Sigma_{PA} \vdash R(x,y)$ (1)

ha $Pr(x,y)$ nem egy fennálló metaaritmetikai tény, akkor $\Sigma_{PA} \vdash \neg\, R(x,y)$ (2)

ahol Σ_{PA} a Peano aritmetika axiómarendszerét jelöli. A fenti feltételekben megfogalmazott *regularitás,* vagyis, hogy (1) és (2) a $\{Pr(x,y)\}_{x,y}$ család minden elemére teljesül, a Gödel-féle reprezentációfogalom lényege, és esszenciális szerepe van a tétel bizonyításában (Crossley et al., 1990, 55–56.). Mert, például, semmi sem következne abból, ha csak egyetlen igaz metaaritmetikai tényálláshoz hozzárendelnénk egyetlen tételét az aritmetikának. Valójában az (1)-ben és (2)-ben szereplő „ha… akkor” kifejezés értelmetlen lenne, ha csak egyetlen tényállásról és a hozzá tartozó tételről lenne szó.

Adoptálva tehát a Gödel-féle reprezentációfogalom lényegét, egy elmélet szemantikájának fogalmát a következőképpen adjuk meg:

Egy L formális rendszerhez, a világ valamely U részére mutató (parciális) szemantikát megadni annyit tesz, mint megadni

(A) L formuláinak egy $\{A_\lambda\}_\lambda$ és az U tényállásainak egy $\{a_\lambda\}_\lambda$ családját, úgy, hogy

(B) minden λ-ra, azaz minden összetartozó A_λ és a_λ párra vonatkozóan teljesüljön, hogy

ha a_λ U-nak egy valóban fennálló ténye, akkor $\Sigma_L \vdash A_\lambda$ (3)

ha a_λ tényállás nem áll fenn U-ban, akkor $\Sigma_L \vdash \neg A_\lambda$ (4)

Az így értelmezett szemantika keretében az $\{A_\lambda\}_\lambda$ családba tartozó formulák jelentéssel lesznek felruházva: konkrétan az A_λ formula az a_λ tényállást jelenti, arra referál.

9. Ezen a ponton máris néhány fontos észrevételt kell tennünk.

(a) A formulák jelentése relatív a szemantikai konstrukció egészére nézve, jelesül arra nézve, hogy az (A) pontban milyen két $\{A_\lambda\}_\lambda$ és $\{a_\lambda\}_\lambda$ családot adunk meg. Más szóval, ha elgondolunk két különböző szemantikát, az egyiket valamilyen $\{A_\lambda\}_\lambda$ és $\{a_\lambda\}_\lambda$, a másikat valamilyen másik $\{\bar{A}_{\bar{\lambda}}\}_{\bar{\lambda}}$ és $\{\bar{a}_{\bar{\lambda}}\}_{\bar{\lambda}}$ családdal, egy olyan formula, amely esetleg mindkét formulacsaládban benne van, hordozhat teljesen különböző jelentéseket.

(b) A jelentés ugyanakkor nem csupán konvenció kérdése. Nem egy tetszőleges hozzárendelés tényállások és a formális rendszer formulái között, hiszen ennek a „hozzárendelésnek” ki kell elégítenie a (B) feltételt is. (B) teljesülése azonban L-nek és U-nak *közös* produkciója: L-nek olyannak kell lennie és U-nak olyannak kell lennie, hogy (B) teljesüljön.

(c) Vegyük észre, hogy a (B) kondíció teljesülése nem mást jelent, mint hogy az (L,S) elmélet, vagyis a formális rendszer és a szemantika együtt, U-nak egy *helyes/igaz* elmélete. Hiszen a (B) feltétel pontosan annyit mond, hogy az elmélet predikciói, vagyis jelentéssel bíró tételei, pontosan megfelelnek az elmélet tárgyát képező U tényeinek. Mivel (B) kondíció része a szemantika fogalmának, azt látjuk, hogy *a jelentés és az igazság fogalma szétválaszthatatlanul összefonódik*. De nem abban a Willard Van Orman Quine által jogosan kritizált (Quine, 1951, 1969) naiv értelemben, ahogyan ezt a jelentés verifikációs elmélete feltételezte.

(d) Ugyanis, mint látjuk, a jelentés, és a fentiek értelmében, az igazság, lényegüknél fogva *holisztikus* fogalmak. Egyszerűen értelmetlen egyetlen izolált formula jelentéséről és igazságáról beszélni. Nemcsak azért, mert a formuláknak egyszerre egy egész családja „testületileg” van jelentéssel – és ezzel együtt igazsággal vagy hamissággal – felruházva, hanem azért is, mert a (B) kondícióban az a tény, hogy $\Sigma_L \vdash A_\lambda$ vagy $\Sigma_L \vdash \neg A_\lambda$, az elmélet egy tetszőlegesen nagy részét involválhatja.

(e) A szemantika, a fenti holisztikus jellegével együtt, szerves részét alkotja az elméletnek. (Nincs „elmélet” interpretáció nélkül!) Egy (L,S) fizikai elmélet empirikus falszifikációja esetén az elmélet bármelyik alkotórésze revízió alá vonható: L-ben, a nyelvtől és a derivációs szabályoktól kezdve, a logikai és matematikai, valamint a fizikai axiómákon át, egészen az elmélet S szemantikájáig. Tehát a szemantika éppannyira hipotetikus, mint az elmélet bármely más része.

10. Fontos tisztáznunk, hogy a_λ nem része az elmélet nyelvének, hanem egy metanyelvi szimbólum, amellyel a fizikai világ egy tényállását, konfigurációját jelöltük. A fiziko-formalista felfogásnak megfelelően, $\Sigma_L \vdash A_\lambda$, illetve $\Sigma_L \vdash \neg A_\lambda$ szintén fizikai tényeket fejeznek ki, történetesen az L formális rendszernek mint fizikailag létező objektumnak a tényeit. Vagyis, amit a (B) kondícióban látunk, az nem más, mint egy regularitás, más néven, *korreláció* a fizikai világ két részének, L-nek és U-nak a tényállásai között. Kombinálva ezt a megfigyelésünket a Reichenbach-féle *közös ok elvével,* vagyis azzal a tézissel, hogy nincs a fizikai világban korreláció valamilyen, direkt vagy közösok-típusú kauzális magyarázat nélkül (Reichenbach, 1956; Hofer-Szabó et al., 2013), arra a következtetésre kell jutnunk, hogy úgy a szemantikai kapcsolat, mint a fizikai elmélet igazsága, vagyis a fizikai világra vonatkozó *tudás* csak a fizikai világban végbemenő kauzális folyamat eredményeként jöhet létre. Kis reflexióval belátható, hogy ez a fizikai világban végbemenő kauzális folyamat nem más, mint *a tapasztalat útján történő tanulás* folyamata. Tehát, nem lehetséges a fizikai világról tudás, vagyis tudás, tapasztalat nélkül. Sőt, a 9. (c) pontnak megfelelően, nem lehetséges a fizikai világról szóló értelmes, jelentéssel bíró beszéd tapasztalat nélkül. Nincs *a priori* jelentés, és nincs *a priori* igazság.

11. Tekintsük a következő szituációt. Tegyük fel, hogy L konzisztens. Könnyen belátható, hogy az alábbi állítások nem lehetnek egyszerre igazak:

(i) A formula az a tényállást jelenti
(ii) $\Sigma_L \vdash A$
(iii) a nem áll fenn U-ban

Ugyanis (i) és (iii), a 8. pont (B) kondíciónak megfelelően azt implikálná, hogy $\Sigma_L \vdash \neg A$. Ez viszont ellentmondásban lenne (ii)-vel. Vagyis, az elmélet megcáfolásának pillanatában, amikor azt tapasztaljuk, hogy a nem áll fenn, nincs semmi jogunk azt mondani, hogy azt tapasztaljuk, hogy „$\neg A$”. Egyszerűen azért, mert ha a nem áll fenn, akkor a (B) kondíció nem teljesül, és ezzel az egész szemantika elveszett. Ezért $\neg A$ nem hordoz semmiféle jelentést, így nem referálhat arra, amit éppen tapasztalunk. Más szóval, semmilyen sajátosságot/tulajdonságot nem tulajdoníthatunk a fizikai valóságnak abban a szituációban, amikor a nem áll fenn.

Jelöljük ezt a kifejezetlen, artikulálatlan állását a dolgoknak a^*-gal. Amint a tapasztalati tanulás folyamatában egy módosított (vagy teljesen új) (L',S') elméletet alkotunk, tényállások egy új $\{a'_{\lambda'}\}_{\lambda'}$ és formulák egy új $\{A'_{\lambda'}\}_{\lambda'}$ családjával, úgy, hogy $a^* = a'_{\lambda'_*}$ és a (B) kondíció teljesül, a megfelelő $A'_{\lambda'_*}$ formula mint egy, az új elméletben megfogalmazható attribútum lesz a^* tényállásnak tulajdonítva, és ezáltal, legalábbis az (L',S') elmélet szerint, a fizikai világ valós attribútuma lesz az a^* állapotban.

Ez a példa rávilágít arra, hogy a szemantika, és ezáltal az elmélet egésze, az elméletben használt formális rendszerrel együtt, *konstitutív* szerepet játszik a világ entitásokkal és azok attribútumaival történő berendezésében (Reichenbach, 1965; Szabó, 2019).

12. Jelen megfontolásaink szempontjából azonban fontos megjegyeznünk, hogy a formális rendszerek konstitutív szerepe semmi esetre sem jelenti azt, hogy létezne egy *a priori* konceptuális struktúra, melynek terminusaiban a tapasztalt világot megragadjuk, és hogy ez a konceptuális struktúra valamiféle „analitikus igazságokat” generálna. Mert, ami itt létezik, az minden, csak nem konceptuális: léteznek a fizikailag megtestesült formális rendszerek, mindenféle jelentés nélkül. És amint a formális rendszer formulái jelentést kapnak – a 8. pontban leírtak értelmében –, azonnal igazak vagy hamisak lesznek, nem analitikus, hanem empirikus értelemben. És, tegyük hozzá, az empíria nem jelent sem többet sem kevesebbet, mint azt a fizikai világban végbemenő kauzális folyamatot, amely az L fizikai létező és az U fizikai létező tényállásai között a (B) kondícióban leírt korrelációt létrehozza. Semmi szükség tehát valamiféle intuitív vagy transzcendens szubjektum tételezésére. Az episztemikus ágens egyszerűen része ennek az akár evolúciós időkig visszanyúló fizikai folyamatnak.

13. Hajlamosak lehetnénk úgy gondolni, hogy mindez csak az elmélet nyelvének interpretált, vagyis a fizikai világhoz közvetlenül kötött, arra referáló részére igaz, vagyis az L formális rendszer azon objektumaira, melyek a szemantika alapját képező $\{A_\lambda\}_\lambda$ családba tartozó formulákban involválódnak, s hogy a formális rendszer maradék, tisztán „teoretikus” részébe tartozó objektumok rendelkeznének valamiféle, a fizikai világra történő referenciától független „tiszta fogalmisággal”, és hogy a „végtelen”, az ő összes problémájával együtt, valahol ebben a „tisztán fogalmi” szférában foglal helyet.

Túl azon az ontológiai problémán, hogy egy ilyenfajta „tiszta fogalmiság" – szükségtelenül – visszacsempészne valamilyen, a fizikalizmussal összeférhetetlen mentális vagy absztrakt entitásokat, vegyük észre, hogy ez az elképzelés az elmélet empirikus és teoretikus részének distinkciójára épül, ami teljesen tarthatatlan. Az empirikus–teoretikus distinkció alapja ugyanis az a feltételezés, hogy az elmélet interpretált, vagyis az $\{A_\lambda\}_\lambda$ családba tartozó formulái önmagukban, az elmélet többi részétől függetlenül képesek a fizikai világra referálni. Ez azonban nem igaz. Ahogyan azt a 9. (d) pontban már említettük, a szemantika abban az értelemben is holisztikus, hogy a (B) kondícióban az a tény, hogy $\Sigma_L \vdash A_\lambda$ vagy $\Sigma_L \vdash \neg A_\lambda$, az elmélet tetszőlegesen nagy részét involválhatja, vagyis lényegében az elmélet egészének tulajdonsága. Ez egyben azt is jelenti, hogy az elmélet nem interpretált része ugyanúgy részt vesz a jelentéshordozásban.

Ugyanakkor, fontos ismételten kiemelnünk, hogy a formális rendszer elemei e nélkül, az elmélet egésze, valamint a fizikai világnak az elmélet által leírt *U* része által együtt létrehozott jelentéshordozás nélkül, üres, jelentés nélküli szimbólumok, akár „végtelennek", akár „kettőnek" hívjuk őket.

Készült az NKFI Hivatal támogatásával, No. K115593.

IRODALOM

Arntzenius, F. (2010): Reichenbach's Common Cause Principle. In: Zalta, E. N. (ed.): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. https://plato. stanford. edu/archives/fall2010/entries/physics-Rpcc/

Ayer, A. J. (1952): *Language, Truth and Logic*. New York: Dover Publications

Bacon, F. (2000): *The New Organon*. Aphorisms – *On the Interpretation of Nature and the Kingdom of Man.* Cambridge: Cambridge University Press

Bell, E. T. (1951): *Mathematics: Queen and Servant of Science.* New York: McGraw-Hill Book Company

Carnap, R. (1937): *The Logical Syntax of Language*. London: Kegan, Paul, Trench, Trubner & Co.

Carnap, R. (1939): Theories as Partially Interpreted Formal Systems. In: Carnap, R.: *Foundations of Logic and Mathematics*. Chicago: University of Chicago Press

Crossley, J. N. – Ash, C. J. – Stillwell, J. C. et al. (1990): *What Is Mathematical Logic?* New York: Dover Publications

Curry, H. B. (1951): *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics.* Amsterdam: North-Holland

Hamilton, A. G. (1988): *Logic for Mathematicians*. Cambridge: Cambridge University Press

Hardy, G. H. (1929): Mathematical Proof. *Mind,* 38, 149, 1–25. DOI: 10.2307/2249221, http://wwwprof.uniandes.edu.co/~amartin/cursos/filomat/bibliografia/Hardy.pdf

Hofer-Szabó G. – Rédei M. – Szabó L. E. (2013): *The Principle of the Common Cause*. Cambridge: Cambridge University Press

Quine, W. V. (1951): Two Dogmas of Empiricism. *Philosophical Review,* 60, 20–43. DOI: 10.2307/2181906, http://www.f.waseda.jp/sidoli/Quine_Two_Dogmas.pdf

Quine, W. V. (1969): Epistemology Naturalized. In: Quine, W. V.: *Ontological Relativity and Other Essays*. New York: Columbia University Press, 69–90. https://iweb.langara.ca/rjohns/files/2015/03/Quine_selection.pdf

Reichenbach, H. (1956): *The Direction of Time*. Berkeley: University of California Press

Reichenbach, H. (1965): *The Theory of Relativity and A Priori Knowledge*. Berkeley–Los Angeles: University of California Press

Szabó, L. E. (2003): Formal Systems as Physical Objects: A Physicalist Account of Mathematical Truth. *International Studies in the Philosophy of Science,* 17, 117–125. DOI: 10.1080/0269859031000160568, http://philsci-archive.pitt.edu/1164/1/formfiz_preprint.pdf

Szabó, L. E. (2012): Mathematical Facts in a Physicalist Ontology. *Parallel Processing Letters,* 22, 1240009. DOI: 10.1142/S0129626412400099, http://phil.elte.hu/leszabo/Preprints/LESzabo-math_in_physical-preprint.pdf

Szabó, L. E. (2017): Meaning, Truth, and Physics. In: Hofer-Szabó, G. – Wroski, L. (eds.): *Making it Formally Explicit*. (*European Studies in Philosophy of Science* 6.) Berlin: Springer International Publishing, http://philsci-archive.pitt.edu/12891/13/LE_Szabo-Meaning-Truth-Physics-v5.pdf

Szabó, L. E. (2019): Intrinsic, Extrinsic, and the Constitutive A Priori. *Foundations of Physics* (2019). DOI: 10.1007/s10701-019-00281-z, http://philsci-archive.pitt.edu/15567/1/LESzabo-intrinsic6.pdf

Weir, A. (2015): Formalism in the Philosophy of Mathematics. In: Zalta, E. N. (ed.): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2015 Edition), https://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/formalism-mathematics/